$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

Kombinatorial (Bagian 1)

Bahan Kuliah

IF2120 Matematika Diskrit

Oleh: Rinaldi Munir

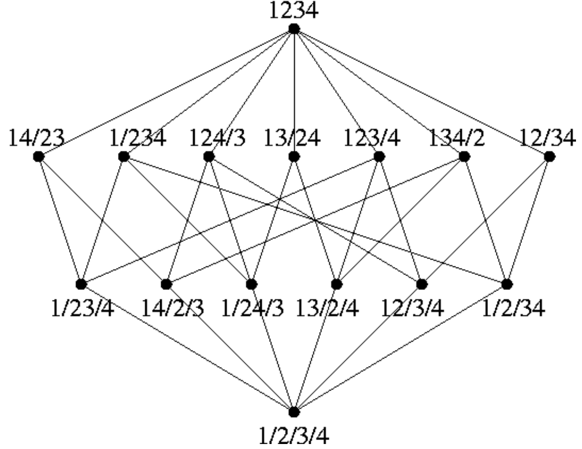
Program Studi Teknik Informatika
STEI - ITB

Pendahuluan

- Sebuah kata-sandi (*password*) panjangnya 6 sampai 8 karakter. Karakter boleh berupa huruf atau angka. Berapa banyak kemungkinan kata-sandi yang dapat dibuat?

```
abcdef
aaaade
a123fr
…
erhtgahn
yutresik
…
```

????



Definisi Kombinatorial

Kombinatorial adalah cabang matematika untuk menghitung (*counting*) jumlah penyusunan objek-objek tanpa harus mengenumerasi semua kemungkinan susunannya.

Contoh-contoh persoalan kombinatorial

1. Nomor PIN kartu ATM bank adalah 6 angka. Berapa jumlah PIN yang dapat dibuat?
2. Kode buku sebuah perpustakaan terdiri dari dua huruf dan diikuti 4 angka. Berapa jumlah buku yang dapat dikodekan?
3. Berapa banyak cara membentuk sebuah komisi beranggotakan 10 orang yang dipilih dari 100 anggota DPR jika ketua DPR harus termasuk di dalamnya?

Kaidah Dasar Menghitung

- **Kaidah perkalian (*rule of product*)**

  Percobaan 1: p hasil

  Percobaan 2: q hasil

  Percobaan 1 **dan** percobaan 2: $p \times q$ hasil

- **Kaidah penjumlahan (*rule of sum*)**

  Percobaan 1: p hasil

  Percobaan 2: q hasil

  Percobaan 1 **atau** percobaan 2: $p + q$ hasil

Contoh 1. Ketua angkatan IF 2019 hanya 1 orang (pria atau wanita, tidak bias gender). Jumlah pria IF2019 = 65 orang dan jumlah wanita = 15 orang. Berapa banyak cara memilih ketua angkatan?

<u>Penyelesaian</u>: 65 + 15 = 80 cara.

Contoh 2. Dua orang perwakilan IF2019 mendatangai Bapak Rektor untuk protes kenaikan UKT. Wakil yang dipilih 1 orang pria dan 1 orang wanita. Berapa banyak cara memilih 2 orang wakil tersebut?

<u>Penyelesaian</u>: $65 \times 15 =$ 975 cara.

Perluasan Kaidah Dasar Menghitung

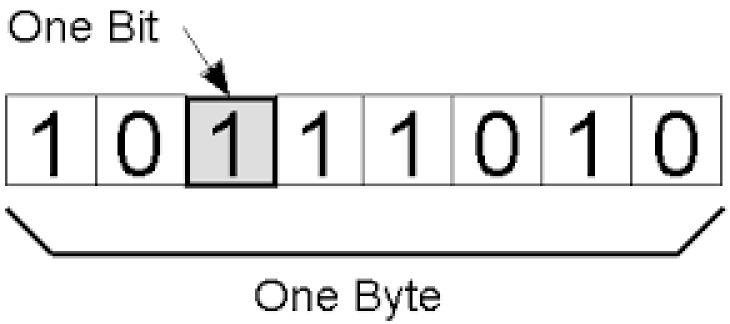
Misalkan ada n percobaan, masing-masing dengan p_i hasil

1. Kaidah perkalian (*rule of product*)

$$p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n \text{ hasil}$$

2. Kaidah penjumlahan (*rule of sum*)

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n \text{ hasil}$$



Contoh 3. Bit biner hanya 0 dan 1. Berapa banyak *string* biner yang dapat dibentuk jika:

(a) panjang *string* 5 bit

(b) panjang *string* 8 bit (= 1 *byte*)

<u>Penyelesaian</u>:

(a) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$ buah

(b) $2^8 = 256$ buah

Contoh 4. Berapa banyak bilangan ganjil antara 1000 dan 9999 (termasuk 1000 dan 9999 itu sendiri) yang

(a) semua angkanya berbeda

(b) boleh ada angka yang berulang.

Penyelesaian: ___ ___ ___ ___

(a) posisi satuan: 5 kemungkinan angka (1, 3, 5, 7, 9)

posisi ribuan: 8 kemungkinan angka

posisi ratusan: 8 kemungkinan angka

posisi puluhan: 7 kemungkinan angka

Banyak bilangan ganjil seluruhnya = (5)(8)(8)(7) = 2240 buah.

(b) posisi satuan: 5 kemungkinan angka (yaitu 1, 3, 5, 7 dan 9);

posisi ribuan: 9 kemungkinan angka (1 sampai 9)

posisi ratusan: 10 kemungkinan angka (0 sampai 9)

posisi puluhan: 10 kemungkinan angka (0 sampai 9)

Banyak bilangan ganjil seluruhnya = (5)(9)(10)(10) = 4500

Contoh 5. Kata-sandi (*password*) sistem komputer panjangnya 6 sampai 8 karakter. Tiap karakter boleh berupa huruf atau angka; huruf besar dan huruf kecil tidak dibedakan. Berapa banyak kata-sandi yang dapat dibuat?

<u>Penyelesaian</u>:

Jumlah karakter kata-sandi = 26 huruf (A-Z) + 10 angka (0-9) = 36 karakter.

Jumlah kemungkinan kata-sandi dengan panjang 6 karakter: __ __ __ __ __ __

$(36)(36)(36)(36)(36)(36) = 36^6 = 2.176.782.336$

Jumlah kemungkinan kata-sandi dengan panjang 7 karakter: __ __ __ __ __ __ __

$(36)(36)(36)(36)(36)(36)(36) = 36^7 = 78.364.164.096$

Jumlah kemungkinan kata-sandi dengan panjang 8 karakter: __ __ __ __ __ __ __ __

$(36)(36)(36)(36)(36)(36)(36)(36) = 36^8 = 2.821.109.907.456$

Jumlah seluruh kata-sandi (kaidah penjumlahan) adalah

$2.176.782.336 + 78.364.164.096 + 2.821.109.907.456 = 2.901.650.833.888$ buah.

Latihan:

1. (a) Berapa banyak bilangan genap yang disusun oleh 2 angka?

   (b) Berapa banyak bilangan ganjil 2-angka dengan setiap angka berbeda?

2. Dari 100.000 buah bilangan bulat positif pertama, berapa banyak bilangan yang mengandung tepat satu buah angka 3, satu buah angka 4, dan satu buah angka 5?

Jawaban:

1. ___ ___

   (a) 9 x 5 = 45

   (b) 8 x 5 = 40

2. ___ ___ ___ ___ ___

   Angka 3 dapat ditempatkan dengan 5 cara

   Angka 4 dapat ditempatkan dengan 4 cara

   Angka 5 dapat ditempatkan dengan 3 cara
   Angka keempat dapat diisi dengan 7 cara (7 angka lain)

   Angka kelima dapat diisi dengan 7 cara (7 angka lain)

   Jumlah seluruh bilangan = 5 x 4 x 3 x 7 x 7 = 2940

3. Tersedia 6 huruf: *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*. Berapa jumlah susunan 3-huruf jika:

(a) tidak ada huruf yang diulang;

(b) boleh ada huruf yang berulang;

(c) tidak boleh ada huruf yang diulang, tetapi huruf *e* harus ada;

(d) boleh ada huruf yang berulang, huruf *e* harus ada

Jawaban: ___ ___ ___

(a) 6 x 5 x 4 = 120 (b) 6 x 6 x 6 = 6^3 = 216

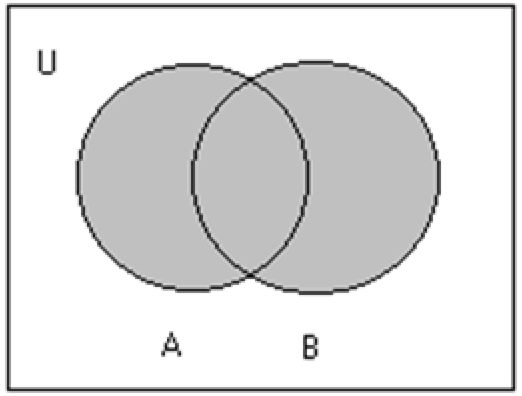
(c) 3 x (5 x 4) = 60 (d) (6 x 6) + (5 x 6) + (5 x 5) = 91

4. Tentukan banyak cara pengaturan agar 3 orang mahasiswa Prodi Teknik Informatika (IF), 4 orang mahasiswa Teknik Kimia (TK), 4 orang mahasiswa Teknik Geologi (GL), dan 2 orang mahasiswa Farmasi (FA) dapat duduk dalam satu baris sehingga mereka dari Prodi yang sama duduk berdampingan?

Jawaban: ______ ______ ______ ______

Ada 4! cara menempatkan kelompok Prodi mahasiswa di dalam susunan
Masing-masing 3! cara, 4! cara, 4! cara, dan 2! cara menempatkan mahasiswa Prodi yang sama di dalam susunannya. Total seluruh cara pengaturan = (4!)(3!)(4!)(4!)(2!)

Prinsip Inklusi-Eksklusi



Setiap *byte* disusun oleh 8-bit. Berapa banyak jumlah *byte* yang dimulai dengan ‘11’ atau berakhir dengan ‘11’?

Penyelesaian: __ __ __ __ __ __ __ __

Misalkan

A = himpunan *byte* yang dimulai dengan ‘11’, 1 1 __ __ __ __ __ __

B = himpunan *byte* yang diakhiri dengan ‘11’ __ __ __ __ __ __ 1 1

$A \cap B$ = himpunan *byte* yang berawal dan berakhir dengan ‘11’

maka 1 1 __ __ __ __ 1 1

$A \cup B$ = himpunan *byte* yang berawal dengan ‘11’ atau berakhir dengan ‘11’

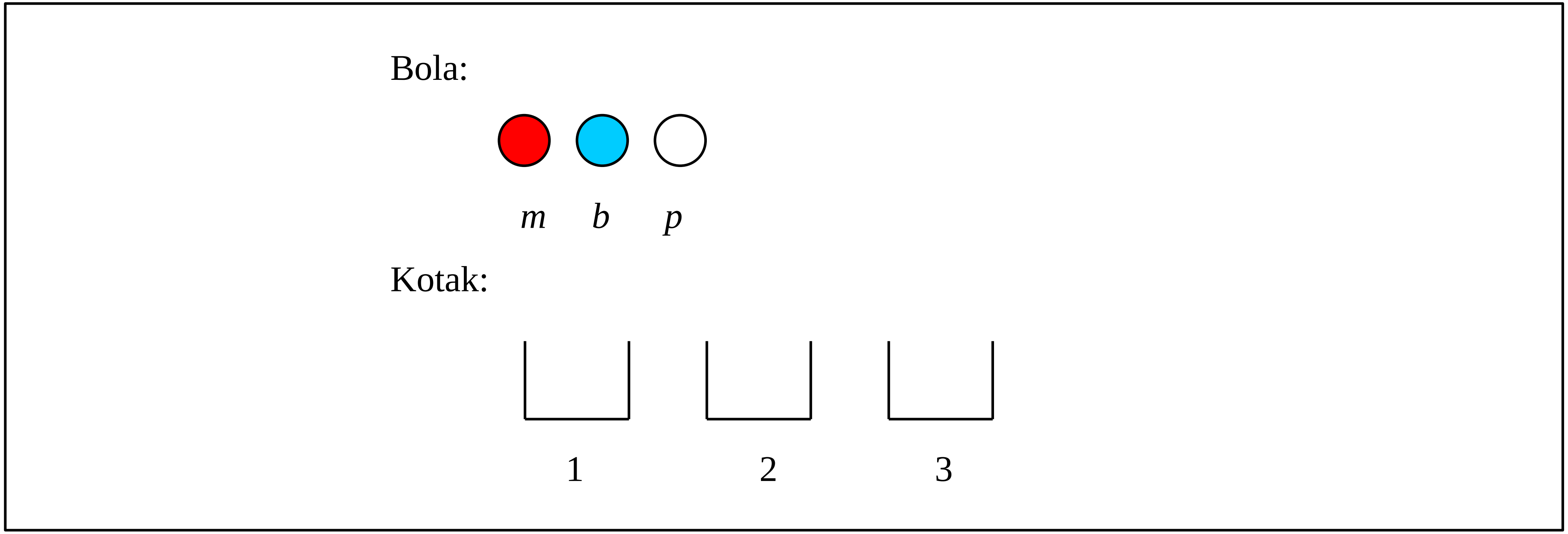
$$\left|A\right| = 2^6 = 64, \quad \left|B\right| = 2^6 = 64, \quad \left|A \cap B\right| = 2^4 = 16.$$

maka

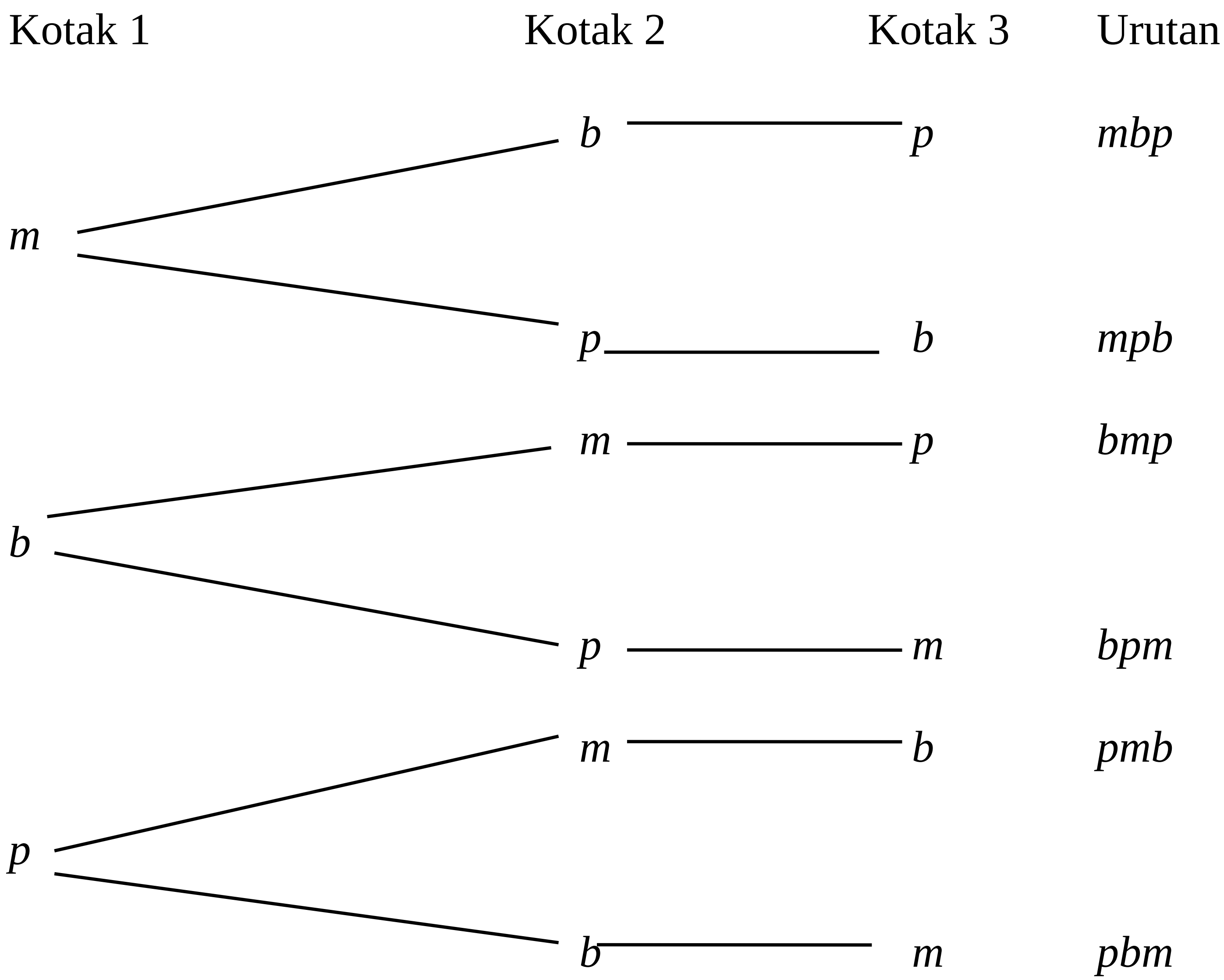
$$\left|A \cup B\right| = \left|A\right| + \left|B\right| - \left|A \cap B\right|$$

$$= 2^6 + 2^6 - 16 = 64 + 64 - 16 = 112.$$

Permutasi



Berapa jumlah urutan berbeda yang mungkin dibuat dari penempatan bola ke dalam kotak-kotak tersebut?



Jumlah kemungkinan urutan berbeda dari penempatan bola ke dalam kotak adalah (3)(2)(1) = 3! = 6.

Definisi 1: **Permutasi** adalah jumlah urutan berbeda dari pengaturan objek-objek.

- Permutasi merupakan bentuk khusus aplikasi kaidah perkalian.
- Misalkan jumlah objek adalah n, maka
  - ✓ urutan pertama dipilih dari n objek,
  - ✓ urutan kedua dipilih dari $n – 1$ objek,
  - ✓ urutan ketiga dipilih dari $n – 2$ objek,
  - ✓ …
  - ✓ urutan terakhir dipilih dari 1 objek yang tersisa.

Menurut kaidah perkalian, permutasi dari n objek adalah

$$n(n - 1)(n - 2) \ldots (2)(1) = n!$$

Contoh 6. Berapa banyak “kata” yang terbentuk dari huruf-huruf kata “HAPUS”?

Penyelesaian: ___ ___ ___ ___ ___

Cara 1: (5)(4)(3)(2)(1) = 120 buah kata

Cara 2: 5! = 120 buah kata

Contoh 7. Berapa banyak cara mengurutkan nama 25 orang mahasiswa?

Penyelesaian: 25!

Permutasi *r* dari *n* elemen

Ada enam buah bola yang berbeda warnanya dan 3 buah kotak. Masing-masing kotak hanya boleh diisi 1 buah bola. Berapa jumlah urutan berbeda yang mungkin dibuat dari penempatan bola ke dalam kotak-kotak tersebut?

Bola:

m *b* *p* *h* *k* *j*

Kotak:

1 2 3

<u>Penyelesaian</u>:

kotak 1 dapat diisi oleh salah satu dari 6 bola (ada 6 pilihan);

kotak 2 dapat diisi oleh salah satu dari 5 bola (ada 5 pilihan);

kotak 3 dapat diisi oleh salah satu dari 4 bola (ada 4 pilihan).

Jumlah urutan berbeda dari penempatan bola = (6)(5)(4) = 120

Perampatan:

Ada n buah bola yang berbeda warnanya dan r buah kotak ($r \leq n$), maka

kotak ke-1 dapat diisi oleh salah satu dari n bola → (ada n pilihan) ;

kotak ke-2 dapat diisi oleh salah satu dari (n – 1) bola → (ada n – 1 pilihan);

kotak ke-3 dapat diisi oleh salah satu dari (n – 2) bola → (ada n – 2) pilihan;

…

kotak ke-r dapat diisi oleh salah satu dari (n – (r – 1) bola → (ada $n - r + 1$ pilihan)

Jumlah urutan berbeda dari penempatan bola adalah: $n(n - 1)(n - 2)…(n - (r - 1))$

Definisi 2. Permutasi r dari n elemen adalah jumlah kemungkinan urutan r buah elemen yang dipilih dari n buah elemen, dengan $r \leq n$, yang dalam hal ini, pada setiap kemungkinan urutan tidak ada elemen yang sama.

$$\boxed{P(n, r) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1)) = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

Contoh 7. Berapakah jumlah kemungkinan membentuk bilangan 3-angka dari 5 angka berikut: 1, 2, 3, 4 , 5, jika:

(a) tidak boleh ada pengulangan angka, dan

(b) boleh ada pengulangan angka.

Penyelesaian:

(a) Dengan kaidah perkalian: (5)(4)(3) = 60 buah

Dengan rumus permutasi $P(5, 3) = 5!/(5 – 3)! = 60$

(b) Tidak dapat diselesaikan dengan rumus permutasi.

Dengan kaidah perkalian: $(5)(5)(5) = 5^3 = 125$.

Contoh 8. Kode buku di sebuah perpustakaan panjangnya 7 karakter, terdiri dari 4 huruf berbeda dan diikuti dengan 3 angka yang berbeda pula?

Penyelesaian: $P(26, 4) \times P(10,3) = 258.336.000$

Latihan:

Sebuah mobil mempunyai 4 tempat duduk. Berapa banyak cara 3 orang didudukkan jika diandaikan satu orang harus duduk di kursi sopir?

Jawaban:

Kursi supir dapat diisi dengan salah satu dari 3 orang (atau 3 cara). Sekarang tersisa tiga buah kursi lagi. Tiga kursi ini dapat diisi oleh dua orang lainnya. Maka jumlah cara mendudukkan tiga orang adalah 3 x P(3, 2) = 3 x (3!/(1!) = 18.

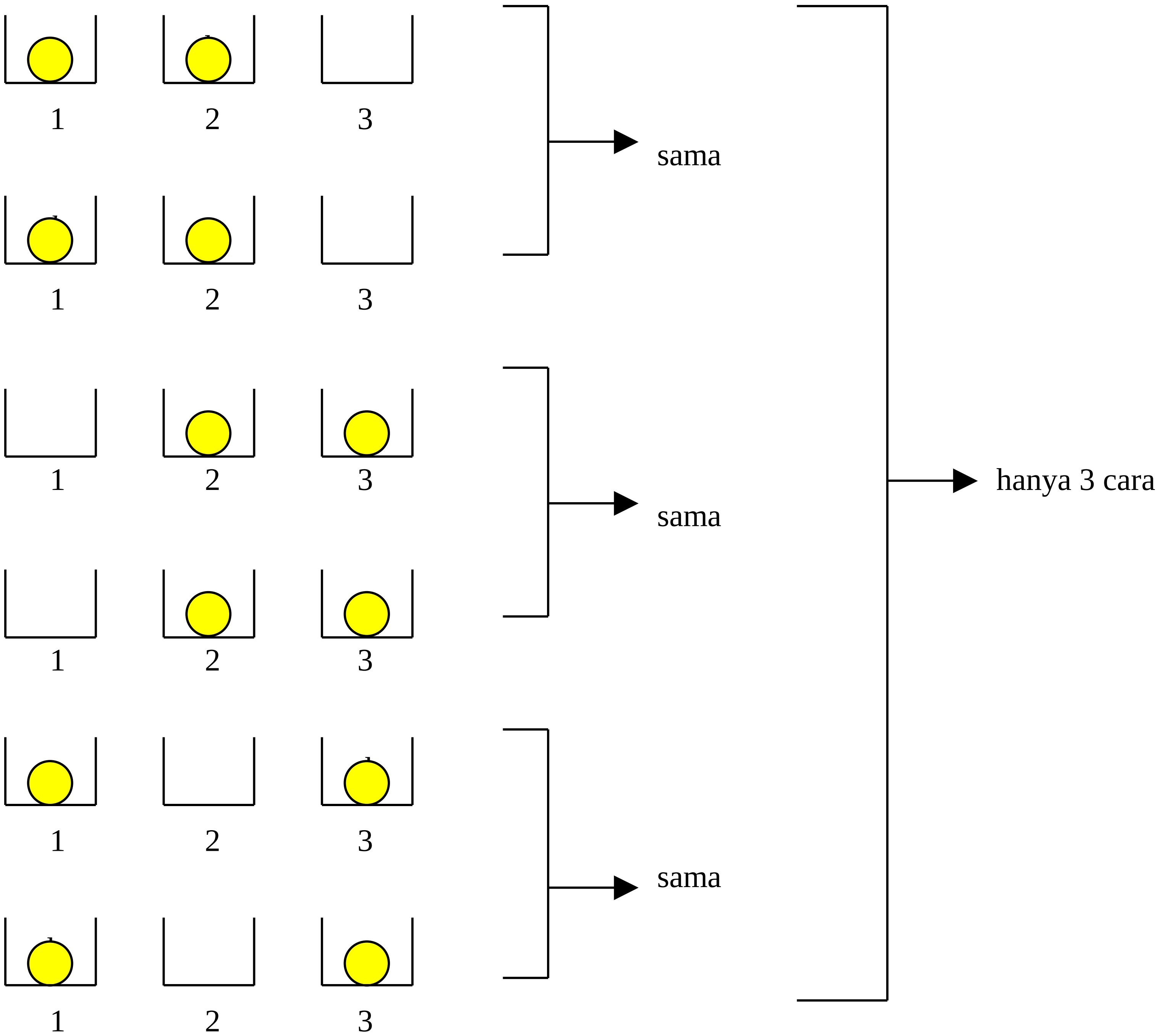
Kombinasi

- Bentuk khusus dari permutasi adalah **kombinasi**. Jika pada permutasi urutan kemunculan diperhitungkan, maka pada kombinasi urutan kemunculan diabaikan.

- Misalkan ada 2 buah bola yang warnanya sama dan 3 buah kotak. Setiap kotak hanya boleh berisi *paling banyak* satu buah bola.

Jumlah cara memasukkan bola ke dalam kotak =

$$\frac{P(3,2)}{2} = \frac{P(3,2)}{2!} = \frac{\frac{3!}{1!}}{2!} = \frac{(3)(2)}{2} = 3.$$


1 2 3
1 2 3
sama
1 2 3
1 2 3
sama
1 2 3
1 2 3
sama
hanya 3 cara

- Bila sekarang jumlah bola 3 dan jumlah kotak 10, maka jumlah cara memasukkan bola ke dalam kotak adalah

$$\frac{P(10,3)}{3!} = \frac{\frac{10!}{7!}}{3!} = \frac{(10)(9)(8)}{3!}$$

karena ada 3! cara memasukkan bola yang warnanya sama.

- Secara umum, jumlah cara memasukkan *r* buah bola yang berwarna sama ke dalam *n* buah kotak adalah

$$\boxed{\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1))}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C(n, r)} \text{ atau } \binom{n}{r}$$

- $C(n, r)$ sering dibaca "n diambil r", artinya r objek diambil dari n buah objek.

- **Definisi 3.** Kombinasi r elemen dari n elemen, atau $C(n, r)$, adalah jumlah pemilihan yang tidak terurut r elemen yang diambil dari n buah elemen.

Interpretasi Kombinasi

1. $C(n, r)$ = banyaknya himpunan bagian yang terdiri dari r elemen yang dapat dibentuk dari himpunan dengan n elemen.

   Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$
   Jumlah Himpunan bagian dengan 2 elemen:

$$\left.\begin{array}{l}\{1, 2\} = \{2, 1\} \\ \{1, 3\} = \{3, 1\} \\ \{2, 3\} = \{3, 2\}\end{array}\right\rangle \quad 3 \text{ buah}$$

   atau $C(3,2) = \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{3!}{1!2!} = 3$ buah

2. $C(n, r)$ = cara memilih r buah elemen dari n buah elemen yang ada, tetapi urutan elemen di dalam susunan hasil pemilihan tidak penting.

Contoh 9: Berapa banyak cara membentuk panitia (komite, komisi, dsb) yang beranggotakan 5 orang dari sebuah fraksi di DPR yang beranggotakan 25 orang?

Penyelesaian:

Panitia atau komite adalah kelompok yang tidak terurut, artinya setiap anggota di dalam panitia kedudukannya sama.

Misalkan lima orang yang dipilih adalah A, B, C, D, dan E, maka urutan penempatan masing-masingnya di dalam panitia tidak penting (ABCDE sama saja dengan BACED, ADCEB, dan seterusnya). Banyaknya cara memilih anggota panitia yang terdiri dari 5 orang anggota adalah $C(25,5) = 53130$ cara.

Contoh 10. Di antara 10 orang mahasiswa Teknik Informatika Angkatan 2019, berapa banyak cara membentuk sebuah perwakilan yang beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga:

a) mahasiswa bernama *A* selalu termasuk di dalamnya;

b) mahasiswa bernama *A* tidak termasuk di dalamnya;

c) mahasiswa bernama *A* selalu termasuk di dalamnya, tetapi *B* tidak;

d) mahasiswa bernama *B* selalu termasuk di dalamnya, tetapi *A* tidak;

e) mahasiswa bernama *A* dan *B* termasuk di dalamnya;

f) setidaknya salah satu dari mahasiswa yang bernama *A* atau *B* termasuk di dalamnya.

Penyelesaian:

a) mahasiswa bernama *A* selalu termasuk di dalamnya;

Masukkan A ke dalam perwakilan (1 cara), maka tersisa 9 orang. Dari 9 orang ini dipilih 4 anggota perwakilan lainnya, ini ada sebanyak C(9,4) cara. Sehingga terdapat 1 x C(9, 4) = C(9, 4) = 126 cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga *A* selalu termasuk di dalamnya.

b) mahasiswa bernama *A* tidak termasuk di dalamnya;

Keluarkan A dari 10 orang, sehingga tersisa 9 orang. Ada *C*(9, 5) = 126 cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga *A* tidak termasuk di dalamnya.

c) mahasiswa bernama *A* selalu termasuk di dalamnya, tetapi *B* tidak;

Masukkan A ke dalam perwakilan, keluarkan B sehingga tersisa 8 orang. Dari 8 orang pilih 4 perwakilan lagi, jadi ada *C*(8, 4) = 70 cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga *A* termasuk di dalamnya, tetapi *B* tidak.

d) mahasiswa bernama *B* selalu termasuk di dalamnya, tetapi *A* tidak;

Sama seperti soal c di atas, ada $C(8, 4) = 70$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga *B* termasuk di dalamnya, tetapi *A* tidak.

e) mahasiswa bernama *A* dan *B* termasuk di dalamnya;

Masukkan A dan B ke dalam perwakilan sehingga tersisa 8 orang. Dari 8 orang ini pilih tiga perwakilan lagi. Ada $C(8, 3) = 56$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga *A* dan *B* selalu termasuk di dalamnya.

f) setidaknya salah satu dari mahasiswa bernama *A* atau *B* termasuk di dalamnya.

Jumlah cara membentuk perwakilan sedemikian sehingga setidaknya salah satu dari *A* atau *B* termasuk di dalamnya

= jumlah cara membentuk perwakilan sehingga *A* termasuk di dalamnya, *B* tidak

\+ jumlah cara membentuk perwakilan sehingga *B* termasuk di dalamnya, *A* tidak

\+ jumlah cara membentuk perwakilan sehingga *A* dan *B* termasuk di dalamnya

= 70 + 70 + 56 = 196

Cara kedua adalah dengan menggunakan prinsip inklusi-eksklusi:

X = jumlah cara membentuk perwakilan yang menyertakan *A*

Y = jumlah cara membentuk perwakilan yang menyertakan *B*

$X \cap Y$ = jumlah cara membentuk perwakilan yang menyertakan *A* dan *B*,

maka

$|X| = C(9, 4) = 126$; $|Y| = C(9, 4) = 126$; $|X \cap Y| = C(8, 3) = 56$;

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y| = 126 + 126 - 56 = 196$$

Latihan:

1. Kursi-kursi di sebuah bioskop disusun dalam baris-baris, satu baris berisi 10 buah kursi. Berapa banyak cara mendudukkan 6 orang penonton pada satu baris kursi:

   (a) jika bioskop dalam keadaan terang

   (b) jika bioskop dalam keadaan gelap

   Petunjuk: dalam keadaan gelap, orang-orang di dalam bioskop tidak dapat dibedakan

   <u>Jawaban</u>:

   (a) $P(10, 6) = 10!/(10 – 6)! = 151200$

   (b) $C(10, 6) = 10!/(6!4!) = 210$

2. Ada 5 orang mahasiswa jurusan Matematika dan 7 orang mahasiswa jurusan Informatika. Berapa banyak cara membentuk sebuah panitia yang beranggotakan 4 orang jika:

   (a) tidak ada batasan jurusan di dalam panitia tersebut

   (b) semua anggota panitia harus dari jurusan Matematika

   (c) semua anggota panitia harus dari jurusan Informatika

   (d) semua anggota panitia harus dari jurusan yang sama

   (e) 2 orang mahasiswa per jurusan harus mewakili.

3. Berapa banyak cara membentuk sebuah panitia yang beranggotakan 5 orang yang dipilih dari 7 orang pria dan 5 orang wanita, jika di dalam panitia tersebut paling sedikit beranggotakan 2 orang wanita?